

## 2 A relatividade do tempo e do espaço

De imediato – após repetidas comprovações experimentais de que a luz viaja com mesma velocidade relativamente a qualquer referencial inercial, estando ou não em repouso com relação à fonte luminosa – a comunidade científica do final do século XIX e início do século XX se empenhou em buscar um formalismo físico e matemático que, diferentemente da mecânica Newtoniana, entrasse em concordância com os experimentos. Em suma, buscavam relações matemáticas capazes de manter a velocidade da luz tendo sempre o mesmo valor independente do referencial adotado. Hendrik Lorentz obteve as relações corretas em 1904.

### 2.1 As transformações de Lorentz

Historicamente, várias propostas surgiram após o experimento de Michelson-Morley a fim de explicar os seus resultados. Em 1889, o irlandês FitzGerald propôs a ocorrência da contração no comprimento dos materiais com velocidade relativa ao, até então assumido como existente, éter. Esta contração seria real, ou seja, uma aproximação interatômica devido a interação dos átomos que compõem o material com o éter. (? Porquê ele propôs isso?) Imaginem que utilizássemos uma régua para medir a distância percorrida pela luz em um determinado tempo, a fim de obter então sua velocidade  $c$ . Considerando a existência do éter, uma forma de a velocidade da luz ser a mesma em referenciais com diferentes velocidades relativamente ao éter seria que a régua utilizada na medida tivesse diferentes comprimentos dependendo de sua velocidade em relação ao éter. Se isso fosse verdade, então o fato do experimento mostrar a mesma velocidade para a luz em diferentes referenciais inerciais seria explicado pela impossibilidade de medirmos a velocidade usando uma régua com mesmo comprimento em todos os referenciais, o que obviamente, não retornaria valores reais para a velocidade calculada. Em resumo, esta proposta sugere uma impossibilidade no processo de medida. Lorentz propôs algo semelhante; ainda pensando no éter ele obteve suas equações de uma forma mais detalhada. Sua intenção foi de encontrar um conjunto de relações matemáticas cujas variáveis necessárias para cálculo de velocidade da luz se relacionassem de tal forma que impossibilitassem a detecção do éter e, como verificaremos, essas relações só são possíveis se além da contração do comprimento, ocorrer também a dilatação do tempo.

Procedimento De início o procedimento é extremamente simples. Devemos escrever o que foi observado nos experimentos de Michelson-Morley. Consideremos então dois sistemas de referência com velocidade relativa  $\vec{u} = u_x \hat{i}$ , como representamos na Figura 1.

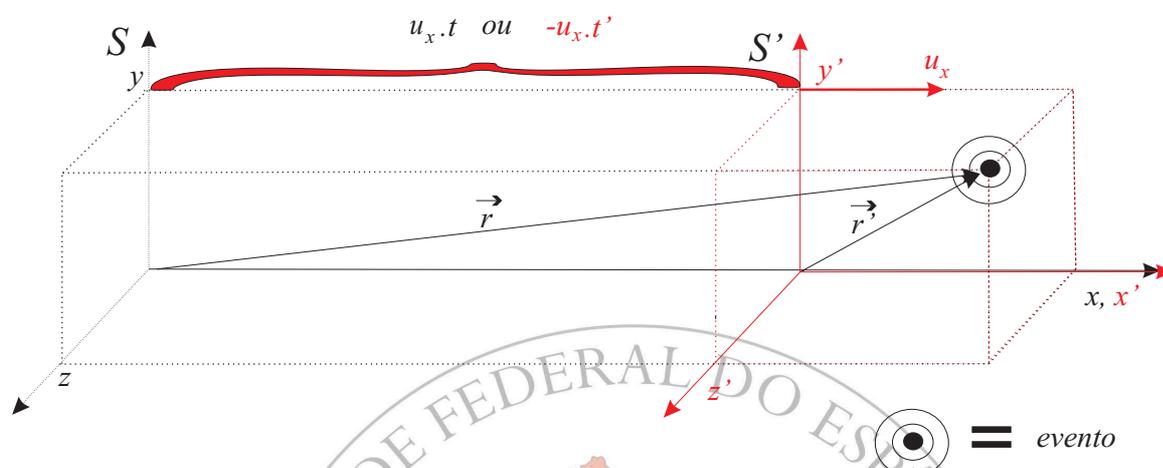


Figura 1: Referenciais S e S'

Queremos obter a transformação  $(x, y, z, t) \Leftrightarrow (x', y', z', t')$ , ou seja, se em um dos sistemas um dado evento ocorre em uma determinada posição e em um determinado momento, então em que posição e momento este mesmo evento é observado de outro referencial inercial?

Antes de iniciarmos a abordagem matemática que nos levará às transformações de Lorentz, vamos colocar a situação a ser tratada em uma forma apenas ilustrativa. Com isso podemos desenvolver alguma intuição.

Situação: Vamos considerar dois sistemas inerciais com velocidade relativa  $u_x$  como na Figura 1. Consideremos também que cada sistema conta com um arranjo de relógios sincronizados como ilustrado na Figura 2.

Da forma como a situação foi colocada na Figura 1, fica fácil concluir que os centros dos dois sistemas se sobrepõem quando  $t = t' = 0$ . Vamos supor então que um evento ocorra no centro comum dos sistemas neste instante; um evento do tipo um pulso de luz. A partir deste momento ( $t = t' = 0$ ) vamos analisar como dois observadores situados um em cada centro de sistema observarão o pulso luminoso se afastando. Vamos chamar de João o observador em S e de Maria o observador em S'.

Sendo assim, nossa análise tem de concordar com as observações de Michelson-Morley, que a luz

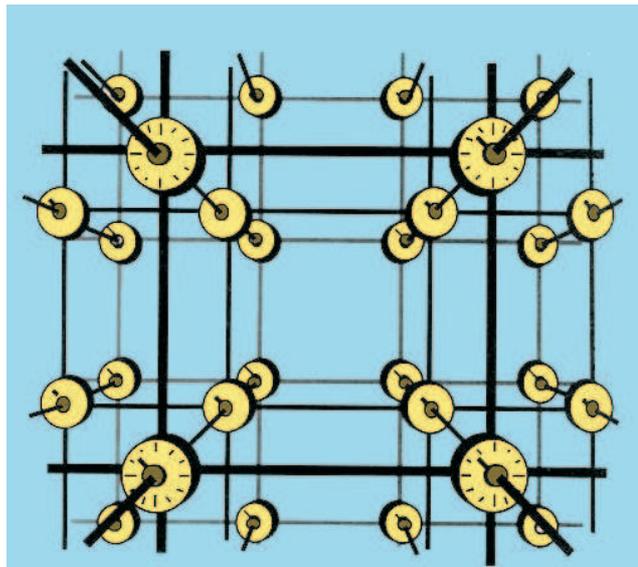


Figura 2: Relógios sincronizados e posicionados nos pontos coordenados.

se propaga com mesma velocidade independente do sistema referencial adotado. Isso quer dizer que tanto João quanto Maria observarão uma frente de onda esférica se afastando do centro, de seus respectivos referenciais, com velocidade  $c$ . A primeira ilustração que vem à mente, geralmente, é a colocada na Figura 3. Na Figura 3 representamos a visão de cada observador independentemente. Esta figura estaria correta se assumida do ponto de vista de Maria ou do ponto de vista de João, mas não se observada simultaneamente como na Figura. ? pq? Na realidade existe um único evento que é o pulso luminoso. Então existe, independentemente do sistema adotado, uma única frente de onda se propagando e não duas como a Figura nos induz a concluir (uma se afastando esféricamente de João, círculos pretos, e outra se afastando esféricamente de Maria, círculos vermelhos). Não pode existir duas frentes de onda se propagando pois se isso ocorresse, um terceiro observador, por exemplo, longe do pulso luminoso seria alcançado por duas frentes de onda e concluiria que houveram dois eventos, quando na verdade houve apenas um – então esta configuração não é aceitável (veremos, mais a frente, que trata-se de uma impossibilidade de ilustrar uma situação correta de forma simultânea, pois um desenho ilustrativo é visto simultaneamente).

Como resolver a aparente contradição acima? Temos que obter uma forma de conciliar dois fatos; 1) O pulso de luz se afasta do centro com velocidade  $c$  nos dois referenciais (como colocado na Figura); 2) Só existe uma frente de onda (diferente do que está ilustrado na Figura).

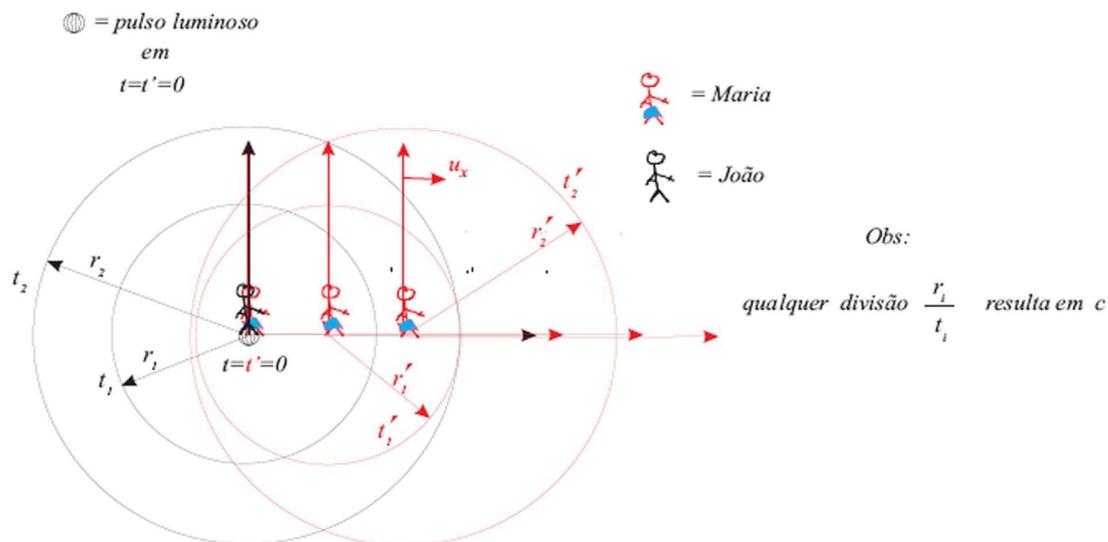


Figura 3: Luz emitida no instante em que os centros dos sistemas se superpõem. Com o passar do tempo (tanto em S quando em S') a onda se expande esféricamente, se afastando dos centros com uma velocidade que é  $c$  se medida de S ou se medida de S'.

Se existe uma única frente de onda, seria possível ilustrarmos esta situação em uma outra figura (corrigida em relação à Figura 3)? Vamos tentar e ver o que obtemos. Para isto escolheremos um dos sistemas referenciais para colocar a frente de onda e então analisaremos o que ocorre para o outro referente à mesma frente de onda. Vamos escolher Maria como referencial de observação "confiável" (onde a luz se afasta com velocidade  $c$  do centro visto por Maria). A figura ficaria, do ponto de vista de Maria, como ilustramos na Fig. 4. Esta situação está correta do ponto de vista de Maria, mas é fácil notar, em primeira análise, que algo não se encaixa bem para João. Observe que se traçarmos duas retas a partir de João, em diferentes direções até alcançarem a frente de onda, estas terão diferentes comprimentos. Seríamos levados a concluir que para João a onda se propaga com diferentes velocidades dependendo da direção observada. Mas isto não está em acordo com os experimentos de Michelson-Morley. Mais uma vez precisamos contornar esta aparente contradição – ? como?

**Resposta:** Não temos muitas opções onde procurar a resposta. Como é uma questão de cálculo de velocidade e sabemos que independente do sistema e da direção escolhida temos que obter um valor  $c$ ; sabendo também que velocidade é obtida por um cálculo simples de  $v = \Delta S / \Delta t$ ; então como  $v = c = \text{constante}$  concluímos que as respostas estão nas variáveis  $\Delta S$  e  $\Delta t$ . Transportando esta conclusão para as figuras, temos que pensar sobre as relações entre  $r_i$  e  $t_i$ , ou seja, nas relações de espaço e de tempo, pois como  $c$  não depende do referencial, então estas grandezas devem depender. Em suma,

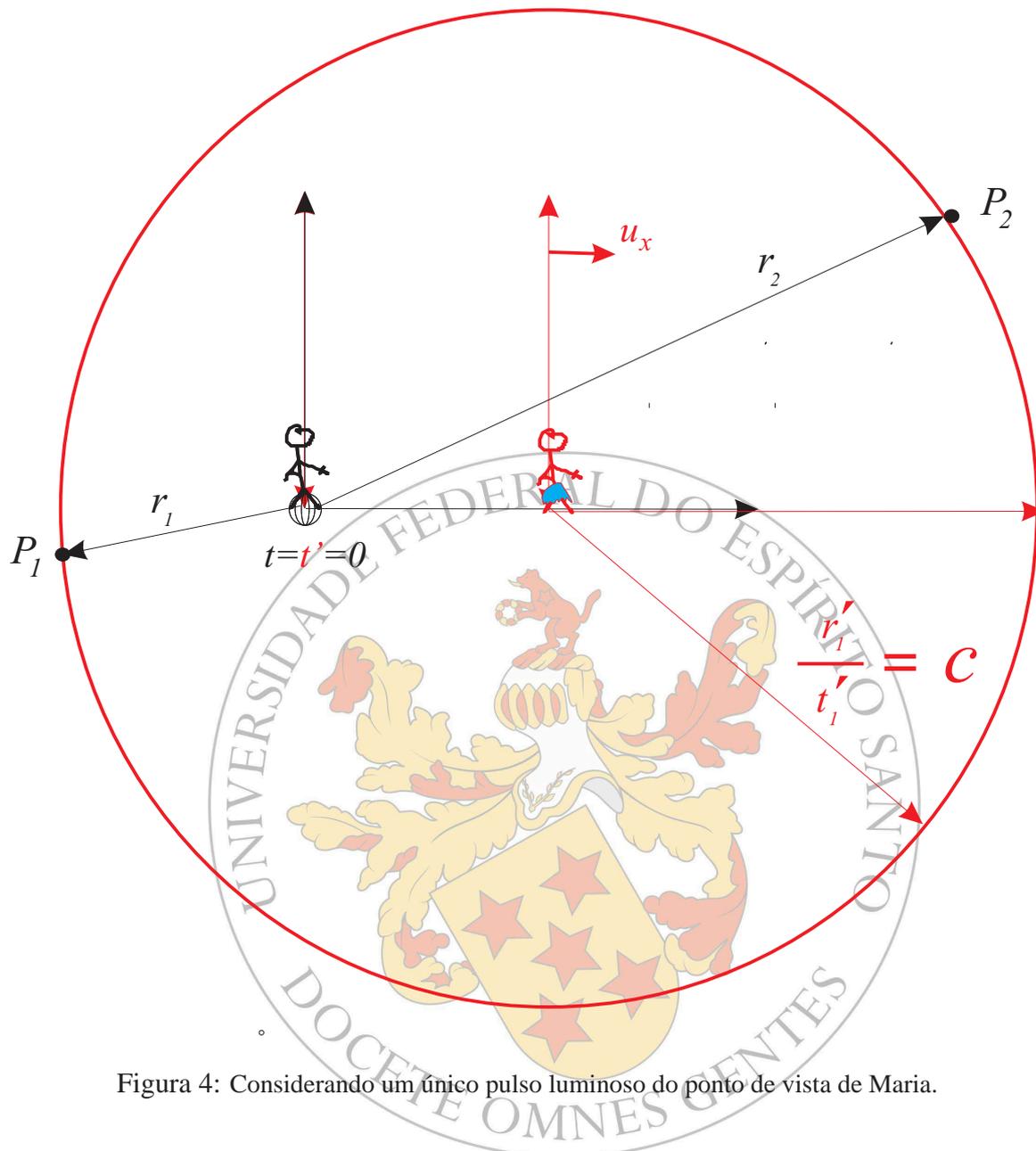


Figura 4: Considerando um único pulso luminoso do ponto de vista de Maria.

concluimos que dependendo do referencial adotado, as variáveis associadas com distância e tempo se ajustam de forma a retornar sempre o mesmo valor para a velocidade da luz independentemente do sistema escolhido ou da direção analisada.

Voltando à Figura 4, somos levados a concluir que  $r_1$  ocorre em um tempo  $t_1$  menor que  $t_2$  associado com a frente de onda em  $r_2$ , tal que  $r_1/t_1 = r_2/t_2 = c$ . Do ponto de vista de Maria os pontos  $P_1$  e  $P_2$  são iluminados simultaneamente, pois estão a uma mesma distância do centro. Contudo, para João estes pontos são iluminados em momentos diferentes, concluimos então que o que é simultâneo para Maria não é simultâneo para João.

Por simetria, chegaríamos a uma conclusão análoga se escolhessemos o referencial de João para relacionar a propagação da onda. Obviamente, não é possível ilustrarmos em uma única figura uma situação que concorde com os postulados e com todos os observadores, visto que enxergamos a figura em um momento único, mas este momento único varia de referencial para referencial. Quero dizer com isso algo do tipo: Suponha que tenhamos uma máquina fotográfica especial capaz de fotografar a frente de onda luminosa (como se fosse uma onda na água). Como ficaria a foto? Seria uma frente de onda esférica em torno de Maria ou em torno de João? (considerando-os no centro do círculo); ou quem sabe não seria esférica? Com certeza seria uma onda esférica, mas seria esférica sempre no referencial onde se encontrar a máquina fotográfica, se esta estiver no referencial de maria, obteria em sua foto uma onda esférica em torno de Maria (ou seja, com Maria no centro); se estiver no referencial de João, uma onda esférica em torno de João (com João no centro). Se estiver em um terceiro referencial, obteria uma onda esférica neste terceiro referencial. Mas como vimos, isto não significa que existem muitas ondas esféricas se propagando pelo ar, pois o evento é único e esta situação pode ser contornada através das relações das coordenadas de espaço e de tempo "dilatando" ou "comprimindo" uma ou outra, de forma a retornar sempre  $c$  para velocidade da luz e também concordar com a existência de uma única frente de onda se propagando.

